

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Молчанов А.М.

Институт прикладной математики. Москва.

Институт Биологической физики. Пушкино на Оке.

ПРЕПРИНТ № 4

Москва, 1969г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

п. I. Построение примера

При изучении систем с переменными коэффициентами исследователь часто испытывает потребность в достаточно богатом классе примеров, на которых можно было бы без труда проверять гипотезы, возникающие в процессе изучения.

Ниже предложен простой класс уравнений, зависящий от пяти параметров, который позволяет строить многие полезные примеры.

Рассмотрим два матричных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dU}{dt} = \Omega U \quad (1)$$

$$\frac{dS}{dt} = AS \quad (2)$$

и напишем уравнение для произведения

$$X = US \quad (3)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dU}{dt} S + U \frac{dS}{dt} = \Omega US + UAS = (\Omega + UAU^{-1})X \quad (4)$$

Итак, X удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X \quad (5)$$

где

$$P(X) = \Omega + U(t)AU^{-1}(t) \quad (6)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Тогда

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (8)$$

и несложные выкладки показывают, что

$$P(t) = \begin{pmatrix} \alpha \cos^2 \omega t + \delta \sin^2 \omega t - (\beta + \gamma) \sin \omega t \cos \omega t & (\alpha - \delta) \sin \omega t \cos \omega t + \beta \cos^2 \omega t - \gamma \sin^2 \omega t - \omega \\ (\alpha - \delta) \sin \omega t \cos \omega t - \beta \sin^2 \omega t + \gamma \cos^2 \omega t + \omega & \alpha \sin^2 \omega t + \delta \cos^2 \omega t + (\beta + \gamma) \sin \omega t \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (9)$$

Резюме

Система

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X \quad (10)$$

где матрица $P(t)$ задается формулой (9), имеет решение

$$X = U S \quad (11)$$

причем

$$U = e^{\Omega t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$S = e^{\Lambda t}, \quad (13)$$

так как матрицы Ω и A постоянны.

Замечание I.

Матрица $P(t)$ имеет постоянные собственные значения.

В самом деле формулу (6) можно переписать в виде:

$$P = U(\Omega + A)U^{-1} \quad (14)$$

так как матрица Ω перестановочна с U . Следовательно, матрица P имеет собственные значения, совпадающие с собственными значениями постоянной матрицы B .

$$B = A + \Omega = \begin{pmatrix} 2 & \beta - \omega \\ \gamma + \omega & \delta \end{pmatrix} \quad (15)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \det(P - \lambda E) &= \det(V B V^{-1} - \lambda V V^{-1}) = \det[V(B - \lambda E)V^{-1}] = \\ &= \det V \cdot \det(B - \lambda E) \det V^{-1} = \det(B - \lambda E) \end{aligned} \quad (16)$$

Замечание 2.

Метод построения уравнений с переменными коэффициентами легко обобщается на случай матриц более высокого порядка.

п.2. Противоречий пример к методу "замороженных коэффициентов"

В технических работах популярен так называемый "метод замороженных коэффициентов". Он состоит в том, что в системе вида (10) фиксируют аргумент матрицы P и исследуют на устойчивость полученную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dY}{dt} = P(t_0)Y \quad (17)$$

Если при всех значениях параметра t_0 система (17) оказывается устойчивой, отсюда заключают об устойчивости системы (10).

Покажем, что это заключение неверно.

Рассмотрим следующий пример:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Тогда матрица B имеет треугольный вид:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

и ее собственные числа отрицательны. Так как собственные числа $P(t)$ совпадают с собственными числами B , то все системы (17) при любых значениях t_0 будут устойчивы.

Между тем система (10) не устойчива, так как ее решение есть произведение унитарной матрицы U на решение системы (2), которая в нашем примере неустойчива,

$$\begin{vmatrix} -t-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \quad (21)$$

так ее характеристическое уравнение имеет два корня разных знаков

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -4 \quad (22)$$

Идея примера очевидна. "Метод замороженных коэффициентов" накладывает ограничения (в нашем случае) только на матрицу B . Если вращение Ω не очень велико, то системы A и B одновременно устойчивы или неустойчивы. Однако при большой скорости вращения система A может потерять устойчивость. В нашем примере оказалось достаточно угловой скорости 2.

Ясно, что можно построить много разных примеров и даже найти условия — достаточно малая скорость вращения, при которых устойчивость системы A вытекает из устойчивости B .

п.3. Противоречий пример к схеме усреднения.

Встречается еще одна ошибка. Двойственным к "методу замороженных коэффициентов" является метод усреднения, при котором систему с периодическими коэффициентами заменяют усредненной системой

$$\frac{dx}{dt} = C_x \quad (23)$$

где

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (24)$$

и сущаят об устойчивости (10) по устойчивости (23).

Приведем простой пример неустойчивой системы (10), усредненная система которой имеет матрицу C равной нулю. Усредняя по периоду T ,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (25)$$

матрицу $P(t)$, получаем

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \delta}{2} & \frac{\beta - \gamma}{2} - \omega \\ \frac{\gamma - \beta}{2} + \omega & \frac{\alpha + \delta}{2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Рассмотрим теперь матрицу A вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma e - \omega \\ \gamma e - \omega & -\alpha \end{pmatrix} \quad (27)$$

Это значит, что параметры α , $\gamma e - \omega$ произвольны, а величины β , γ и δ выражаются через них

$$\beta = \gamma e + \omega; \quad \gamma = \gamma e - \omega; \quad \delta = -\alpha \quad (28)$$

Любая матрица A вида (27) порождает матрицу $P(t)$ среднее от которой равно нулю.

Устойчивость системы (5) определяется устойчивостью системы (2), так как решения X и S отличаются только умножением множителем U . Собственные значения матрицы A

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \gamma e + \omega \\ \gamma e - \omega & -\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \alpha^2 - \gamma^2 e^2 + \omega^2 = 0 \quad (29)$$

всегда имеют разные знаки

$$\lambda_1 = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2 - \omega^2}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{\omega^2 + \alpha^2 - \omega^2} \quad (30)$$

Поэтому, если корни действительны, то система обязательно неустойчива.

Интересно, что в этом примере высокая скорость вращения делает вывод об устойчивости правильным, так как корни λ_1 и λ_2 становятся чисто мнимыми. Поэтому "метод замороженных коэффициентов" и "метод усреднения", употребляемые без надлежащей осторожности, приводят к ошибкам в дополнительных (противоположных) условиях.

ПОДПИСАНО К ПЕЧАТИ "10" 21.10.1969 г.

№ Т01617 от 3. 9. 1969 г. ЗАКАЗ № 214 ТИРАЖ 100 экз.

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
МОСКВА, МИУССКАЯ ПЛ. 4